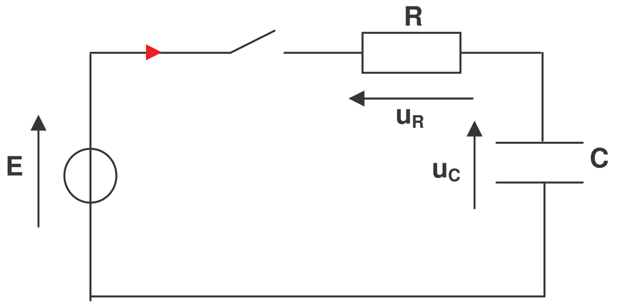
Bac Maroc 2006 – Exercice n°2 – Principe d'une minuterie (5,5 points)

1. Etude théorique d'un dipôle RC soumis à un échelon de tension

1.1.



1.2. $u_R = R.i$	**1.3.** $i = \frac{dq}{dt}$
1.4. $q = C.u_C$	**1.5.** $i = C.\frac{du_C}{dt}$
1.6. $E = u_R + u_C$	

1.7. $E = R.C.\frac{du_C}{dt} + u_C \Rightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R.C}.u_C = \frac{E}{R.C}}$

1.8.1. $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

En reportant dans l'équation différentielle : $\frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{R.C}.\ E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{E}{R.C}$

$\Rightarrow \frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R.C} - \frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R.C}$: VRAI

1.8.2. A $t = 0$: $u_C = E(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}) \Rightarrow u_C = E(1 - 1) = 0$
Le condensateur est donc initialement déchargé.

1.9.1. $[\tau] = [R.C] = [R].[C]$

$[R] = \frac{[u_R]}{[i]}$ et $[C] = \frac{[q]}{[u_C]}$

Or : $[q] = [i].[t] \Rightarrow [C] = \frac{[i].[t]}{[u_C]}$ et $[\tau] = \frac{[u_R]}{[i]}.\frac{[i].[t]}{[u_C]} \Rightarrow \boxed{[\tau] = [t] = T}$

1.9.2. La constante de temps τ est la durée au bout de laquelle la tension aux bornes du condensateur atteint 63% de sa valeur maximale $u_C = E = 12{,}0$ V. Or : $0{,}63.E = 0{,}63 \times 12{,}0 = 7{,}6$ V.
Par lecture sur le graphe en annexe 2 : le point d'ordonnée 7,6 V a pour abscisse $\boxed{t = \tau = 26\ s}$

1.9.3. $\tau = R.C \Rightarrow \boxed{R = \frac{\tau}{C}}$ Soit : **R** $= \frac{26}{120 \times 10^{-6}} = \mathbf{2{,}2 \times 10^5\ \Omega}$

2. Application

2.1. La tension aux bornes du condensateur s'annule instantanément. La lampe s'allume car $u_C < u_{al}$.

2.2.1. Elle augmente exponentiellement pour atteindre une valeur finale égale à E.

2.2.2. La charge du condensateur n'étant pas instantanée, la lampe reste allumée pendant une certaine durée puis s'éteint dès que la tension u_C atteint la valeur u_{al}.

2.2.3. A la date $t = t_{al}$, on a $u_C = u_{al} = E(1 - e^{-\frac{t_{al}}{\tau}})$ => $u_{al} = E - E.\ e^{-\frac{t_{al}}{\tau}}$ => $E.\ e^{-\frac{t_{al}}{\tau}} = E - u_{al}$

=> $e^{-\frac{t_{al}}{\tau}} = 1 - \frac{u_{al}}{E}$ => $\frac{t_{al}}{\tau} = \ln(\frac{u_{al}}{E} - 1)$ => $\boxed{t_{al} = \tau.\ \ln(\frac{u_{al}}{E} - 1)}$

2.2.4. $\mathbf{t_{al}} = 25 \times \ln(\frac{6,0}{12,0} - 1) = \mathbf{17\ s}$

2.2.5. Par lecture sur le graphe en annexe 2 : le point d'ordonnée $u_{al} = 6,0$ V a pour abscisse $\boxed{t_{al} = 18\ s}$
Ce résultat est en cohérence avec le calcul précédent.

2.3. Pour augmenter la durée d'allumage, il faut augmenter la valeur de la constante de temps.
Or : $\tau = R.C$. Il faut donc augmenter R ou/et C.